ПРВО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
недеља, 5. децембар 2004.

Први разред

Време за рад 180 *минута.*
Сваки задатак вреди 20 *поена.*

1. Испитати да ли постоји природан број n за који је број

$$n^2 + 2n + 2005$$

потпун квадрат.

2. Гусар је отео стару карту острва са благом. На њој су уцртани амбар, бунар, ветрењача и гребен (који су на карти означени са A, B, V, G), и они се налазе у теменима паралелограма. На праволинијском путу од амбара до бунара уцртан је јаблан (J) тако да је однос $AJ : JB = 4 : 1$. На праволинијском путу између ветрењаче и гребена уцртана је липа (L). На праволинијском путу од гребена до бунара налазе се закопано благо (X) и крчма (K). На карти се амбар, закопано благо и липа налазе на истом праволинијском путу. Такође на карти се јаблан, крчма и липа налазе на истом праволинијском путу. Ураган је однео амбар, ветрењачу, јаблан и липу, тако да су на острву остали само бунар, крчма и гребен. Гусар је прво установио да је растојање од бунара до крчме $25m$. Након тога је сео у крчму. Тамо је сазнао да је растојање између гребена и крчме $75m$. Колико гусар треба да пређе, када изађе из крчме, да би дошао до блага?

3. Круг k_1 додирује круг k изнутра у тачки C. Нека је M произвољна тачка круга k_1 различита од C. Тангента круга k_1 у тачки M сече круг k у тачкама A и B. Доказати да је $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB$.

4. Колико има петоцифрених бројева који имају све цифре парне и дељиви су са 4, а нису дељиви са 5?

5. Ана, Биљана, Весна и Гордана су прелазиле реку кануом на следећи начин.
Било је три вожње са леве на десну обалу, при чему су сваки пут у кануу биле по две девојке, од којих је једна веслала. У обе вожње са десне обале на леву, у кануу је била само једна девојка. Познато је да Ана може да весла само ако је сама у чамцу, а Биљана ако је сама или са Весном. Зна се и да је свака девојка веслала бар једном.
Која од њих је веслала два пута?

Други разред

Време за рад 180 *минута.*
Сваки задатак вреди 25 *поена.*

6. Одредити све природне бројеве n такве да важи

$$n+[\sqrt{n}]+1 \mid n^2+n+1.$$

7. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао и тачке X и Y на страницама правама AB и BC такве да је $XBYD$ паралелограм. Ако су M, N и L редом средишта AC, BD и пресек AC и XY, доказати да је тачке M, N, L и D припадају једном кругу.

3. **8.** Сума три позитивна реална броја a, b и c је једнака 3. Доказати да важи

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ca.$$

9. На кружници је дато $4k$ тачака. Оне су обојене наизменично црвеном и белом бојом. Свака од $2k$ црвених тачака је спојена са тачно једном црвеном тачком и на тај начин је добијено k црвених тетива. Исто је урађено и са белим тачкама и добијено је k белих тетива. При томе, никоје 3 тетиве се не секу у једној тачки. Доказати да постоји најмање k тачака у којима се секу разнобојне тетиве.

Трећи разред и четврти разред

Време за рад 180 *минута.*
Сваки задатак вреди 25 *поена.*

10. Наћи све функције $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такве да је

$$f\big(f(m)+f(n)\big)=m+n,$$

за свака два природна броја m и n.

11. Нека се четири круга једнаких полупречника секу у тачки O. Означимо пресечне тачке суседних кругова (у неком смеру) са A, B, C и D. Доказати да важи

$$AB\cdot OC\cdot OD+CD\cdot OA\cdot OB=AD\cdot OC\cdot OB+BC\cdot OA\cdot OD.$$

12. Нека су a и b различити природни бројеви за које

$$a^2+ab+b^2 \mid ab(a+b).$$

Доказати да је $|a-b| \geqslant \sqrt[3]{3ab}$.

4. **13.** Буба се на почетку налази у тачки са координатама $(1, \sqrt{2})$. У сваком потезу буба може са поља (x, y) да скочи у било коју тачку $(x, 2x+y)$, $(x, y-2x)$, $(x-2y, y)$, $(x+2y, y)$, али не сме да се врати у тачку у којој је била непосредно пре тог потеза. Да ли буба може после низа потеза да се врати у почетну тачку?

ДРУГО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
недеља, 13. март 2005.

Први разред

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

14. У оштроуглом троуглу $\triangle ABC$, C_0 је подножје висине из темена C, а C_1 средиште странице AB. Нека су E и F тачке на страници AB такве да су $\sphericalangle ACE$ и $\sphericalangle FCB$ једнаки. Нека су затим, M и N подножја нормала из A и B на CE, односно CF. Доказати да тачке M, N, C_0 и C_1 леже на истом кругу.

15. Нека су a, b, c дужине страница тупоуглог троугла, при чему је $c > a$, $c > b$. Доказати да важи $c^3 > a^3 + b^3$.

16. Нека за позитивне реалне бројеве a, b, c важи

$$abc \geqslant ab + bc + ca.$$

Доказати да је

$$abc \geqslant 3(a + b + c).$$

17. Наћи све просте бројеве p такве да је $p^3 + p^2 + p + 1$ потпун квадрат.

18. У траку $1 \times n$ уписују се редом бројеви $1, 2, \ldots, n$. У првом кораку се на произвољно место упише број 1. Затим се број 2 уписује на поље које је суседно са пољем на које је уписан број 1. У сваком следећем кораку се наредни број уписује у поље које је суседно са пољем у које је већ уписан неки број. У последњем кораку се број n упише у преостало слободно поље. На колико начина је могуће извршити такво уписивање бројева?

Други разред

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

19. Спола приписана кружница троугла $\triangle ABC$ додируј BC у K и продужетак AB у L. Друга спола приписана кружница додирује продужетке AB и BC у M и N. Пресек KL и MN је X. Доказати да је CX бисектриса угла ACN.

20. Нека су x, y и z реални бројеви из интервала $(2, 4)$. Доказати неједнакост

$$\frac{x}{y^2 - z} + \frac{y}{z^2 - x} + \frac{z}{x^2 - y} > 1.$$

21. Нека су n и k природни бројеви за које важи $n^k > (k+1)!$. Нека је $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid (\forall i)\ x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Доказати да од сваких $(k+1)! + 1$ елемената из M постоје два $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ такви да је

$$(k+1)! \mid (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \ldots (a_k - b_k)$$

22. Дато је 18 тачака у равни. Они образују укупно $\binom{18}{3}$ троуглова чија је укупна површина P. Шест од тих тачака је обојено плаво, шест црвено и шест зелено. Доказати да збир површина троуглова чија су темена тачке исте боје није већи од $\frac{P}{4}$.

Трећи разред

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

23. Споља приписана кружница троугла $\triangle ABC$ додирује AB и продужетке CA и CB у тачкама C_1, B_1 и A_1 тим редом. Друга споља приписана кружница додирује страницу AC и продужетке BA и BC у B_2, C_2 и A_2. Праве A_1B_1 и A_2B_2 се секу у тачки P док се A_1C_1 и A_2C_2 секу у тачки Q. Доказати да су тачке A, P и Q колинеарне.

24. Нека су $x_1, \ldots, x_n$ реални бројеви чији је збир 0. Нека је m најмањи, а M највећи од тих бројева. Доказати да је

$$x_1^2 + ... + x_n^2 \leqslant -nmM.$$

25. Нека је низ $\{a_n\}$ дат са $a_1 = 43$, $a_2 = 142$ и $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}$ за $n \geqslant 3$. Доказати:
а) a_n и a_{n+1} су узајамно прости;
б) за сваки природан број m постоји бесконачно много природних бројева n таквих да су и $a_n - 1$ и $a_{n+1} - 1$ дељиви са m.

26. Нека су $S_1, S_2, \ldots, S_n$ подскупови скупа реалних бројева од којих је сваки унија два затворена интервала. Ако свака три од ових подскупова имају заједничку тачку, доказати да постоји тачка која припада бар половини ових подскупова.

Четврти разред

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

27. Нека је тачка P пресек дијагонала AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ у ком је $AB = AC = BD$. Нека су O и I центри описаног и уписаног круга троугла $\triangle ABP$. Доказати да ако је $O \neq I$ онда су праве OI и CD нормалне.

28. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цели бројеви чији је најмањи заједнички делилац 1, и нека је $s_k = {x_1}^k + {x_2}^k + \ldots + {x_n}^k$ за све природне бројеве k. Доказати да

$$\text{НЗД}(s_1, s_2 \ldots, s_n) \mid \text{НЗС}(1, 2, \ldots, n).$$

29. Нека су $a_1, a_2, ...a_n$ $(n \geqslant 4)$ ненегативни реални бројеви чији је збир 1. Доказати да важи неједнакост:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leqslant \frac{1}{4}\,.$$

30. Доказати да за сваки природан број n важи да је број $2n$-тоцифрених природних бројева који имају n цифара 1 и n цифара 2 у свом декадном запису, једнак броју n-тоцифрених природних бројева записаних цифрама $1, 2, 3, 4$ који у свом декадном запису имају исти број јединица и двојки.

ТРЕЋЕ ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
Будва, среда, 13. април 2005.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред

31. Да ли постоји природан број n такав да су бројеви

$$2n-1, \qquad 5n-1 \quad \text{и} \quad 13n-1$$

потпуни квадрати?

32. Мали Паја је на табли 2005×2005 поставио 2005 топова који се не туку. Рекао је малом Ратку и малом Радету да они могу сваког топа да помере за један скок скакача у шаху и да ће у новодобијеном распореду постојати два топа која се туку. Да ли је мали Паја у праву?

33. Нека је M произвољна тачка у унутрашњости троугла $\triangle ABC$. Означимо са T_A, T_B и T_C, редом, тежишта троуглова $\triangle BCM$, $\triangle CAM$ и $\triangle ABM$ и нека је T_M тежиште троугла $\triangle T_A T_B T_C$. Наћи геометријско место тачака T_M, када се тачка M "креће" по унутрашњости троугла $\triangle ABC$.

34. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Доказати неједнакост

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}.$$

Други разред

35. Одредити све природне бројеве n који се могу представити као сума неколико (бар два) узастопна природна броја.

36. Доказати неједнакост

$$\frac{a^{2005}}{b+c}+\frac{b^{2005}}{c+a}+\frac{c^{2005}}{a+b} \geqslant \frac{a^{2004}+b^{2004}+c^{2004}}{2}.$$

37. Нека је $BCLK$ квадрат конструисан споља на страници BC оштроуглог троугла $\triangle ABC$. Даље нека је CD висина из C, тако да је D на AB и H ортоцентар троугла ABC. Ако се праве AK и CD секу у P, доказати да је

$$\frac{HP}{PD}=\frac{AB}{CD}.$$

38. Дат је правилни $2n$-тоугао. Произвољна n темена су обојена плаво, а остала су обојена црвеном бојом. Конструисана су два низа бројева: у једном се налазе све дужине дужи које имају крајеве црвене боје, а у другом све дужине дужи које имају крајеве плаве боје. Доказати да су ова два низа једнака.

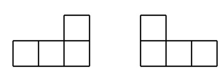
Трећи разред

39. Наћи све парове простих бројева p, q такве да је

$$\frac{p^{2n+1}-1}{p-1} = \frac{q^3-1}{q-1},$$

за неки природан број n.

40. Таблица $m \times n$ може се поплочати L-фигурама



ако и само ако $8 \mid mn$.
(L-фигуре се могу и ротирати)

41. Кругови k_1 и k_2 се додирују споља, при чему је полупречник круга k_1 мањи. Нека су A и D тачке додира њихове заједничке тангенте d_1 са k_1 и k_2 респективно и нека d_2, друга тангента круга k_1 паралелна са d_1, сече круг k_2 у тачкама E и F; напокон нека су тачке $B \in [EF]$ и $C \in k_2$ такве да права BC пролази кроз D. Доказати да круг описан око троугла ABC додирује праву d_1.

42. Наћи све полиноме $P(x)$, степена n, који имају следеће две особине:

1° скуп коефицијената $P(x)$ једнак је скупу $\{0, 1, \ldots, n\}$;

2° све нуле полинома $P(x)$ су реалне.